Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 2

Séance 4

Équations différentielles ordinaires : exemples fondamentaux

Schéma d'Euler explicite (progressif)

Table des matières

I. Équations différentielles ordinaires

Les Équations Différentielles Ordinaires (EDO) jouent un rôle central dans la modélisation de phénomènes physiques, biologiques, économiques, et bien d'autres domaines. Une EDO est une équation qui lie une fonction inconnue à ses dérivées.
Elles sont de la forme :

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

I.1. Équations différentielles d'ordre 1

Exemples :
La vitesse de désintégrations nucléaires spontanées dans le temps est proportionnelle au nombre de noyaux $N(t)$.
Cela se représente par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

où λ est une constante de désintégration homogène à l'inverse du temps.

Cette équation peut être intégré directement, avec la solution :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

On retrouve aussi cette équation pour modéliser l'évolution d'une population avec le modèle de Malthus :
On considère une population représentée par la N en fonction du temps.
On supposera le taux de renouvellement de la population constant, et on le nommera a, et le taux de mortalité de la population constant que l'on nommera b.
λ sera le taux de d'accroissement absolu de la population : $\lambda = a - b$.
La variation annuelle de la taille de la population peut être quantifiée à l'aide de la quantité $\frac{dN(t)}{dt}$.
On a ainsi :

$$\frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t) = \lambda N(t)$$

On retrouve le même type d'équation que pour la désintégration nucléaire.

Pour une équation différentielle d'ordre 1 <u>sans second membre</u> du type (donc à coefficients constants) : $\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = 0$, on retiendra que la solution exacte est : $u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ où u_0 dépendra des conditions initiales.

Pour résoudre une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants et avec second membre du type : : $\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = a$, on retiendra que la solution générale est : $u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau a$ où u_0 dépendra des conditions initiales.

Dans un cas plus général, pour une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient non constant de la forme suivante :

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \ \forall x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

on parle d'un problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.
En faisant l'hypothèse que f est une fonction continue de deux variables vérifiant, de plus, une condition de Lipschitz par rapport à sa deuxième variable, c'est-à-dire que tout tout couple de valeurs y_1 et y_2 , il existe $L \geq 0$ telle que :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in [a, b]$$

le problème admet une solution unique y pour toute valeur initiale y_0.

Considérons une équation du type : $y' + a(x)y = b(x)$.

Dans un premier temps, on résout l'équation homogène sans second membre :

$$y_1{}' + a(x)y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1{}' = -a(x)y_1 \Leftrightarrow \frac{dy_1}{dx} = -a(x)y_1$$

On obtient ainsi l'équation suivante :

$$\frac{dy_1}{y_1} = -a(x)dx$$

On obtient une solution du type :

$$y_1 = Ce^{-A(x)} \text{ où } A \text{ est une primitive de } a$$

Ensuite, on cherche une solution particulière de notre équation avec second membre en utilisant la méthode de la variation de la constante :
On va considérer qu'une solution particulière sera de la forme $y_p = C(x)e^{-A(x)}$ où $C(x)$ est une fonction de x.
On obtient la solution générale de notre équation en concaténant les deux solutions : $y_1 + y_p$.

Un exemple sera plus parlant ;)
Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{2}{x}y = t^2$$

L'équation homogène associée est : $y' + \frac{2}{x}y = 0$.

Les solutions sont de la forme : $y_1 = Ce^{-A(x)}$ où A *est une primitive de* $-\frac{2}{x}$.
Une primitive de $-\frac{2}{x}$ est $-2\ln(x) = \ln(x^{-2})$.
D'où : : $y_1 = Ce^{\ln(x^{-2})} = Cx^{-2} = \frac{C}{x^2}$.

Variation de la constante :
Cherchons une solution particulière sous la forme : $y_p = \frac{C(x)}{x^2}$.
Ainsi : : $y'_p = \frac{C'(x)}{x^2} + C(x).\frac{-2}{x^3}$
En injectant dans notre équation différentielle, on obtient :

$$y'_p + \frac{2}{t} y_p = x^2 \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{x^2} + C(x).\frac{-2}{x^3} + \frac{2}{x}\left(\frac{C(x)}{x^2}\right) = x^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{C'(x)}{x^2} + C(x).\frac{-2}{x^3} + 2\frac{C(x)}{x^3} = t^2 \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{x^2} = x^2 \Leftrightarrow C'(x) = x^4$$

On trouve ainsi que $C(x) = \frac{x^5}{5}$.

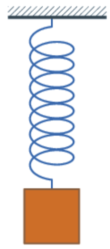
On a : $y_p = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\frac{x^5}{5}}{x^2} = \frac{x^3}{5}$.

La solution générale est donc de la forme : $y(x) = \frac{C}{x^2} + \frac{x^3}{5}$ où $C \in \mathbb{R}$.

I.1. Équations différentielles d'ordre 2

Exemples : L'oscillateur harmonique

On retrouve l'oscillateur harmonique pour décrire un modèle physique au voisinage d'un point d'équilibre (dans des domaines tels que la mécanique, l'électricité ou l'électronique).



- **Système masse – ressort :**

  Le ressort ayant une raideur k, On peut montrer que l'équation du mouvement de la masse s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0 \; avec \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

  On obtient comme solution si la vitesse initiale est nulle:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

  où x_m est **l'amplitude** des oscillations et φ_0 la phase à l'origine, qui dépendent des conditions initiales.

  Remarque :

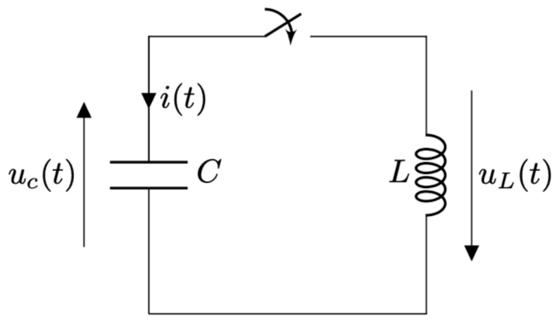
  On peut aussi mettre la solution sous la forme :

$$x(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$$

- Circuit LC :

  Le condensateur a été préalablement chargé sous une tension E. A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, ce qui connecte le condensateur à la bobine en série.

  La mise en équation aboutie à :



$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

  On retrouve bien ici, l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0 \; avec \; \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

II. Schéma d'Euler explicite

II.1. Principe général des méthodes numériques

La solution mathématique d'une équation différentielle est une fonction continue. Or les calculateurs numériques ne connaissent pas le concept de fonction continue, ils ne peuvent fournir (approximativement) que des valeurs prises par une fonction en un nombre de points finis.
Tout commence donc par le choix préalable des abscisses x_i pour i variant de 0 à N où l'on calcule les valeurs approchées de la solution y que nous noterons y_i.
Nous allons donc discrétiser l'intervalle de résolution $[a,b]$.
Nous choisirons des points x_i régulièrement espacés d'un pas h tel que : $h = \frac{b-a}{N}$

II.2. Méthode d'Euler explicite (progressive)

Nous voulons résoudre une équation différentielle de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) \ \forall x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

La méthode s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

Nous connaissons y_0, nous avons choisi un pas : $0{,}1$ par exemple.
On trouve simplement y_1 par la relation : $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.
Connaissant y_1, on calcule y_2 de la même façon, et ainsi de suite.

On parle d'une méthode explicite car l'obtention de y_{n+1} se fait uniquement avec les valeurs x_n et y_n et non avec une résolution d'équation par exemple.

Exemple :
Nous voulons résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode d'Euler explicite sur l'intervalle $[0;\ 2]$:

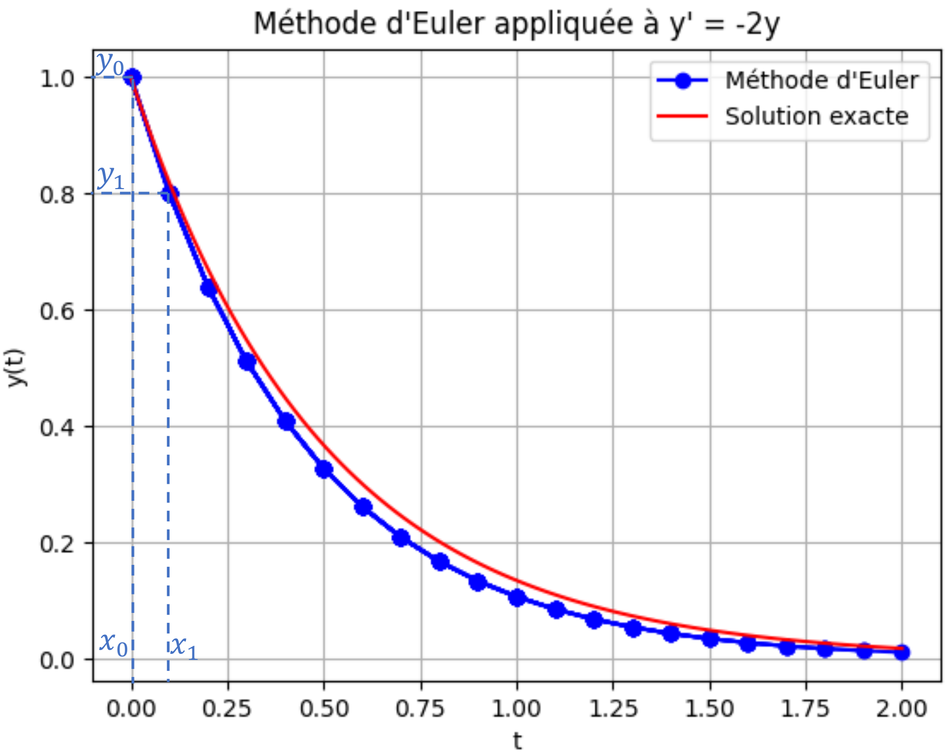
$$\begin{cases} y'(x) = -2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Choisissons un pas de $0{,}1$.
La méthode donne :

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h(-2y_n) = y_n(1-2h) \end{cases}$$

Nous avons : $y_0 = 1$

$$y_1 = y_0(1 - 2 \times h) = 1(1 - 2 \times 0{,}1) = 0{,}8$$
$$y_2 = y_1(1 - 2 \times h) = 0{,}8(1 - 2 \times 0{,}1) = 0{,}64$$
$$\vdots$$



II.3. Stabilité de la méthode d'Euler

Il semble intéressant de se demander si la méthode d'Euler est fiable pour tous types d'équations différentielles d'ordre 1 et pour tout pas utilisé.

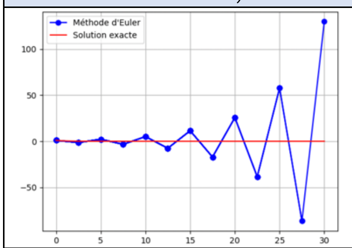
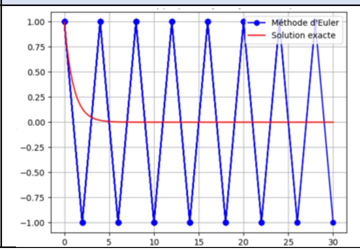
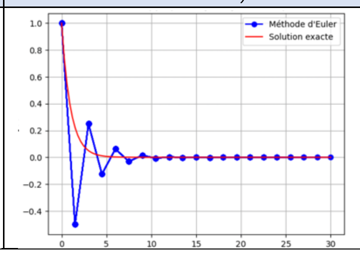
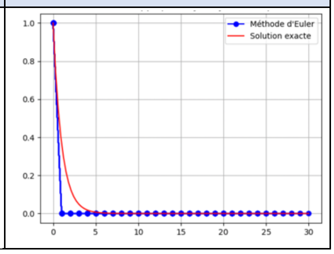
Pour cela, considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(x) = -y \quad \forall\, x \in [0,30] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On remarque que l'intervalle est ici grand, et que nous allons avoir des problèmes si le pas n'est pas assez petit.
La méthode d'Euler nous donne :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + h(-y_n) = y_n(1-h) \end{cases}$$

Voici ce que l'on obtient pour différentes valeurs du pas :

Pas de 2,5	Pas de 2	Pas de 1,5	Pas de 1
			

Nous remarquons ici, que selon le pas choisi, il y a des problèmes de stabilité important qui donnent des solutions numériques pour le moins farfelus.

Comment s'assurer de la stabilité de la méthode d'Euler ?

Nous voulons résoudre une équation différentielle de ce type :

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{\tau} \quad \forall\, x \geq 0 \; et \; \tau > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Nous savons que la solution exacte est : $y(x) = y_0 e^{-\frac{x}{\tau}}$

Notre schéma d'Euler va nous fournir les valeurs : $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots$
Nous savons que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} y(x) = 0$.
Nous allons donc poser, comme condition de stabilité que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = 0$$

La méthode d'Euler nous donne :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{y_n}{\tau}\right) = (1 - \frac{h}{\tau})y_n$$

Nous reconnaissons une suite géométrique de raison $(1 - \frac{h}{\tau})$.
On peut donc en déduite que : $y_n = y_0(1 - \frac{h}{\tau})^n$.

Nous savons que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \left|1 - \frac{h}{\tau}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{h}{\tau} < 1 \Leftrightarrow 0 < h < 2\tau$.

h et τ étant tous deux positifs, on retiendra : $h < 2\tau$.

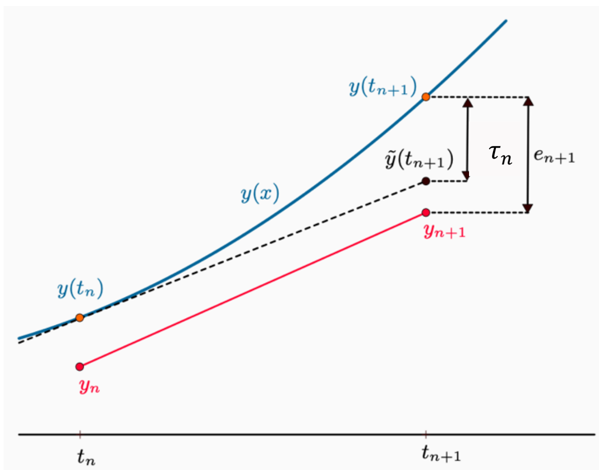
On peut améliorer encore notre condition de stabilité en remarquant que la solution exacte ne change jamais de signe.
Pour notre suite (y_n) cela implique : $1 - \frac{h}{\tau} > 0 \Leftrightarrow h < \tau$.
On retiendra comme condition de stabilité :

$$h < \tau$$

II.4. Erreur avec la méthode d'Euler explicite

Lorsque l'on applique la méthode d'Euler pour résoudre une équation différentielle, la solution numérique obtenue diffère de la solution exacte. Cette différence est appelée **erreur de la méthode**. Les erreurs dans la méthode d'Euler peuvent être classées en deux types principaux :

- **Erreur locale** : L'erreur commise à chaque étape de la méthode (τ_n).
- **Erreur globale** : L'erreur accumulée au fur et à mesure que l'on avance dans les étapes (e_{n+1}).



II.4.1. Erreur locale de troncature

L'erreur locale de troncature est l'erreur commise lors d'une seule étape de la méthode d'Euler. Pour comprendre cette erreur, examinons la méthode d'Euler explicitement.

La méthode d'Euler explicite nous donne :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

y_n est la réponse approximative à x_n, et $y(x_n)$ est la valeur exacte de la solution à x_n.

L'erreur locale de troncature τ_n est définie comme la différence entre la solution exacte et la solution obtenue par la méthode d'Euler après un seul pas de temps, en supposant que la solution exacte au pas précédent est connue :

$$\tau_n = y(x_{n+1}) - (y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)))$$

En développant $y(x_{n+1})$ en série de Taylor à proximité de x_n, on obtient :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h.y'(x_n) + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2)$$

En remplaçant $y'(x_n)$ par $f(x_n, y(x_n))$:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h.f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2)$$

Et on obtient :

$$\tau_n = \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2)$$

C'est donc une erreur d'ordre 2.

Cela signifie que si le pas est divisé par 2, l'erreur sera divisée par 4.

II.4.1. Erreur globale de troncature

L'erreur globale est l'erreur commise après plusieurs étapes de la méthode d'Euler. Soit e_n l'erreur globale à l'étape n, définie par :

$$e_n = y(x_n) - y_n$$

L'objectif est de déterminer comment cette erreur se comporte en fonction du nombre d'étapes n et du pas h.

À l'étape $n + 1$, on a (avec la méthode d'Euler) :

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (1)$$

Comme vu plus haut, nous avons :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h.f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2) \quad (2)$$

L'erreur globale à l'étape $n + 1$ est :

$$e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad (3)$$

En utilisant (1) et (2) dans (3), on trouve :

$$e_{n+1} = y(x_n) + h.f(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2) - (y_n + hf(x_n, y_n))$$

$$\Leftrightarrow e_{n+1} = [y(x_n) - y_n] + h.[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2)$$

$$\Leftrightarrow e_{n+1} = e_n + h.[f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)] + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2) \quad (4)$$

En utilisant un développement de Taylor pour $f(x_n, y_n)$ autour de $y(x_n)$, on a :

$$f(x_n, y_n) = f(x_n, y(x_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)).(y_n - y(x_n)) + o(y_n - y(x_n))$$

$$\Leftrightarrow f(x_n, y_n) = f(x_n, y(x_n)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)).(-e_n) + o(y_n - y(x_n))$$

Ce qui permet d'écrire, d'après (4) :

$$e_{n+1} = e_n + h.\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)).e_n + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2)$$

$$\Leftrightarrow e_{n+1} = e_n.(1 + h.\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2}.y''(x_n) + o(h^2)$$

On voit que l'erreur e_{n+1} est principalement dû à la propagation de l'erreur e_n, et qu'il y a globalement proportionnalité entre e_{n+1} et e_n.

L'erreur est ici d'ordre 1, ce qui donne que la méthode d'Euler explicite est une méthode d'ordre 1. Concrètement, cela signifie que si le pas est divisé par 2, l'erreur globale est divisée par 2.

III. TP3 Méthode d'Euler explicite

On choisit τ = 1 et u0 = 1 pour l'équation différentielle $\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{\tau} = 0$.

1. À la main, appliquez la méthode l'Euler pour 0 ≤ t ≤ 1 avec un pas de 0,1 pour bien comprendre cette méthode.

2. Créer une fonction `euler_explicite` qui permettra de calculer les approximations avec la méthode d'Euler pour 0 ≤ t ≤ 1.

3. Tracer sur un même graphe la solution exacte pour 0 ≤ t ≤ 1 et la solution avec la méthode d'Euler explicite.

On remarque que cette solution dépend du choix du pas de temps Δt.
4. Soit $v(\Delta t, t = 1)$ la valeur approchée de $u(t = 1)$ à l'instant $t = 1$ pour le pas de temps Δt. Tracer la courbe de l'erreur $log\,|v(\Delta t, t = 1) - u(t = 1)|$ en fonction du paramètre $log\,(\frac{1}{\Delta t})$ pour des valeurs de Δt qu'on choisira de la manière la plus simple possible.
Retrouver ce qui a été trouvé dans le cours.